

Из (30) получим уравнения Лагранжа второго рода, или просто уравнения Лагранжа. Уравнения Лагранжа первого рода — уравнения с неопределенными множителями Лагранжа — получены для одной точки в § 8 гл. 1. Уравнения Лагранжа первого рода можно получить и для системы.

Тождества Лагранжа. Для получения уравнений Лагранжа потребуется использовать три тождества. Одно из них — хорошо известная формула дифференцирования скалярного произведения двух любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

или

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} = \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Если принять за $\vec{a}$ вектор скорости $\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$, а за $\vec{b}$ — вектор $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i}$, то в соответствии с этим тождеством получим

$$\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (31)$$

Другое тождество (тождество Лагранжа) выражается в виде

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt}, \quad (32)$$

где точки над величинами означают их производные по времени. Величина $\dot{q}_i = dq_i/dt$ называется *обобщенной скоростью*. Тождество (32) утверждает, что «точки» (дифференцирование по времени) можно поставить одновременно в числителе и знаменателе или их «сократить». Справедливость (32) доказывается вычислением входящих в него величин и их сравнением. Действительно, в общем случае

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), t).$$

При движении системы обобщенные координаты тоже есть функции времени. Дифференцируя $\vec{r}_k$ по времени как его сложную функцию, имеем

$$\dot{\vec{r}}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}. \quad (33)$$

Частные производные $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$ не могут зависеть от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$; следовательно, дифференцирование частным образом по $\dot{q}_i$ с фиксированным номером обеих частей (33) дает только коэффициент при этой переменной. Все остальные слагаемые при дифференцировании дадут нули, так как они не зависят от $\dot{q}_i$ с этим фиксированным номером. Имеем

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i.$$

Тождество (32) доказано.

Другое тождество Лагранжа заключается в перестановке порядка дифференцирования по времени и обобщенной координате вектора $\vec{r}_k$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}. \quad (34)$$

Для доказательства этого тождества вычислим $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}$, используя (33) и учитывая, что обобщенные скорости не зависят от обобщенных координат. Получим

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (35)$$

С другой стороны, $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ есть сложная функция времени, которая зависит от него не только явно, но и через обобщенные координаты. По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (36)$$

Порядок частного дифференцирования в смешанных производных можно изменять. С учетом этого (35) и (36) совпадают. Таким образом, второе тождество Лагранжа доказано.

Вывод уравнений Лагранжа. Для получения из (30) уравнений Лагранжа для обобщенной силы инерции необходимо доказать справедливость следующей формулы:

$$Q_i^{(0)} = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right], \quad (37)$$

где

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2}$$

— кинетическая энергия системы при ее движении относительно инерциальной системы отсчета.

Для доказательства (37) вычислим $Q_i^{(0)}$, используя ее определение через силу инерции $\vec{F}_k = -m_k \ddot{\vec{r}}_k = -m_k \ddot{\vec{r}}_k$. Имеем

$$Q_i^{(0)} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} = - \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i}. \quad (38)$$

Преобразуем выражение

$$A = \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

В соответствии с тождеством (31)

$$A = \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

Применим тождества Лагранжа:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

После этого

$$A = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

Подставляя это значение A в (38) и внося постоянную массу под знак производных, а производные вынося за знак сумм, получим

$$Q_i^{(0)} = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{k=1}^N \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^N \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} \right] = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right].$$

Формула (37) доказана.

Подставляя выражение (37) для $Q_i^{(0)}$ в (30), получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы.

Структура уравнений Лагранжа и их составление. Уравнения Лагранжа для обобщенных координат являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, как и дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах. Число уравнений Лагранжа совпадает с числом обобщенных координат. Действительно, для кинетической энергии системы, используя ее определение и формулу (33) для $\vec{r}_k = \vec{v}_k$, имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C, \quad (40)$$

где введены обозначения

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j}, \quad B_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}, \quad C = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Величины A_{ij} , B_i , C могут зависеть от обобщенных координат и времени, но не зависят от обобщенных скоростей. С учетом этого

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(A_{ij} \ddot{q}_j + \frac{dA_{ij}}{dt} \dot{q}_j \right) + \frac{dB_i}{dt}.$$

Это выражение содержит $\ddot{q}_j$, т. е. производную от обобщенной координаты только второго порядка. Другие слагаемые уравнений Лагранжа содержат производные от обобщенных координат не выше первого порядка. Активные силы $\vec{F}_k$, если они не зависят от ускорений точек, не могут дать зависимости Q_i от обобщенных ускорений.

Интегрируя уравнения Лагранжа для случая заданных активных сил, получим все обобщенные координаты как функции времени и $2n$ постоянных интегрирования. Для определения этих постоянных следует дополнить условия, задать начальные условия, т. е., например, при $t=0$ задать

$$q_i = q_i^0; \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i^0,$$

где q_i^0 и $\dot{q}_i^0$ — начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей.

При составлении уравнений Лагранжа можно рекомендовать следующий порядок операций.

1. Вычислить кинетическую энергию системы в ее движении относительно инерциальной системы отсчета.

2. Выбрав обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, преобразовать кинетическую энергию к обобщенным координатам.

3. Выполнить операции дифференцирования кинетической энергии, предусмотренные уравнениями Лагранжа.

4. Вычислить одним из способов, указанных в § 7, обобщенные силы системы.

5. Приравнять величины левой и правой частей, входящих в уравнения Лагранжа.

Уравнения Лагранжа для потенциальных. Если силы, действующие на точки системы, являются потенциальными, то для обобщенных сил справедлива формула $Q_i = \partial U / \partial q_i$. Силовая функция U не зависит от обобщенных скоростей, поэтому производную от нее по обобщенной скорости $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ можно добавить к $\partial T / \partial \dot{q}_i$. С учетом этого после переноса всех слагаемых в левую часть получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если ввести функцию Лагранжа, или лагранжиан, по формуле

$$L = T + U = T - \Pi, \quad (41)$$

то уравнения Лагранжа для случая потенциальных сил примут форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (42)$$

Функция Лагранжа отличается от полной механической энергии системы

$$E = T + \Pi = T - U.$$

Из уравнений Лагранжа для стационарных потенциальных сил и случая стационарности связей системы можно получить ранее установленный закон сохранения полной механической энергии

$$E = T + \Pi = h,$$

где h — постоянная величина.

Уравнения Лагранжа (41) можно получить как уравнения Эйлера из вариационного исчисления для экстремума функционала

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа. Функционал S , зависящий от функций $q_i(t)$ и $\dot{q}_i(t)$, называется действием по Гамильтону. Для того чтобы действие по Гамильтону имело экстремум, должна быть равна нулю его вариация, т. е.

$$\delta S = 0. \quad (41')$$

Условие (41') выражает так называемый принцип Гамильтона. Принцип Гамильтона утверждает, что для действительного движения системы из одного положения в другое действие по Гамильтону имеет экстремум по сравнению с другими возможными движениями системы при фиксированных значениях q_i на границах, т. е. при t_1 и t_2 .

Принцип Гамильтона позволяет получить уравнения Лагранжа без использования основных аксиом динамики. Следовательно, он заменяет эти аксиомы при выводе уравнений Лагранжа для случая потенциальных сил.

Циклические координаты и циклические интегралы. Функция Лагранжа $L = T + U$ в общем случае зависит от обобщенных

скоростей, обобщенных координат и времени. Если какая-либо обобщенная координата, например q_j , не входит в выражение функции Лагранжа, то для нее

$$\partial L / \partial q_j = 0. \quad (42)$$

Обобщенная координата, которая удовлетворяет условию (42), называется *циклической*. Для циклической обобщенной координаты q_j уравнение Лагранжа примет форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Из него получаем циклический интеграл уравнений Лагранжа:

$$\partial L / \partial \dot{q}_j = C_j, \quad (43)$$

где C_j — постоянная величина.

В циклический интеграл могут входить производные по времени от обобщенных координат, в том числе и производная по времени от циклической координаты не выше первого порядка. Следовательно, (43) в отличие от уравнений Лагранжа в общем случае является обыкновенным дифференциальным уравнением не выше первого порядка. Если все обобщенные координаты являются циклическими, то система уравнений Лагранжа, имеющих второй порядок, заменится циклическими интегралами, имеющими только первый порядок. Интегрировать систему уравнений первого порядка значительно проще, чем систему второго порядка. Отыскание обобщенных координат, которые являются циклическими, имеет важное значение. Используя циклические интегралы, можно так называемым методом игнорирования координат уменьшить число уравнений Лагранжа на количество циклических координат, не повышая при этом порядка получаемых дифференциальных уравнений.

Другое направление в аналитической динамике состоит в отыскании напих интегралов уравнений Лагранжа или другой системы уравнений, им эквивалентной.

Аналитическая механика после Лагранжа получила большое развитие и применение в различных областях науки и техники. Ее методы особенно широко применяются в теории колебаний систем и в квантовой механике.

Пример. Однородный диск A силой тяжести $P = 100$ Н обмотан нерастяжимой нитью, которая перекинута через блок B и прикреплена к грузу D , имеющему силу тяжести $P_2 = 200$ Н (рис. 103). Груз D может скользить по неподвижной наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения скольжения между грузом и плоскостью $f = 0,3$. Блок B , имеющий силу тяжести $P_1 = 400$ Н, принять за однородный диск.

Определить ускорение груза D и оси диска A , а также реакцию оси блока и давление на ось блока, если нить не скользит по блоку. Трением на оси блока и массой нити пренебречь. Движение начинается из состояния покоя.

Решение. Система движущихся тел имеет две степени свободы. За обобщенные координаты системы примем перемещение s груза по наклонной плоскости и угол φ поворота диска A . Угол φ считаем положительным против часовой стрелки, а перемещение s — вниз по наклонной плоскости.

Связями системы являются нить, ось блока и наклонная плоскость. Если наклонную плоскость заменить силами реакций связей, то оставшиеся связи окажутся идеальными, и появится дополнительная степень свободы у груза D . Можно сделать связи идеальными, считая наклонную плоскость гладкой, а шероховатость ее поверхности и поверхность груза D компенсировать силой трения. В этом случае дополнительная степень свободы не появится. Связи окажутся идеальными и для движения системы можно составить уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий отдельных тел:

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

Диск A совершает плоское движение. Его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T_A = \frac{P v_C^2}{2} + J_C \frac{\varphi^2}{2},$$

где v_C — скорость центра масс диска; $J_C = \frac{P r^2}{2}$ — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска; r — радиус диска.

Блок B вращается вокруг неподвижной оси. Его кинетическая энергия

$$T_B = J_C \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2},$$

где $\dot{\varphi}_1$ — угловая скорость блока; $J_C = \frac{P_1 r_1^2}{2}$ — момент инерции относительно оси вращения; r_1 — радиус блока.

Груз D движется поступательно, и его кинетическая энергия

$$T_D = \frac{P_2 s^2}{2}.$$

Так как нить нерастяжима и не скользит по блоку, то угловая скорость блока связана со скоростью груза соотношением $\dot{s} = -r_1 \dot{\varphi}_1$. Скорость груза предполагаем направленной в положительную сторону, т. е. вниз по наклонной плоскости, а следовательно, в начале движения груза из состояния покоя вниз направлено и ускорение груза. Все точки нити имеют одинаковое численное значение скорости $|\dot{s}|$. Следовательно, такую же скорость имеет и точка M диска. Приняв ее за плюс, определяем скорость точки C по формуле, связывающей скорости двух точек тела при плоском движении:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_M + \vec{v}_{CM},$$

где $\vec{v}_{CM} = M \dot{\varphi}$.

При вращении диска против часовой стрелки скорость $\vec{v}_{CM}$ направлена вертикально вниз, а $\vec{v}_M$ — вертикально вверх при движении груза D вниз по наклонной плоскости. Следовательно, $v_C = \dot{s} - r \dot{\varphi}$, где направление вверх считается положительным для точки C .

Выразим кинетическую энергию системы через обобщенные скорости и координаты. Имеем

$$T = T_A + T_B + T_D = \frac{P (\dot{s} - r \dot{\varphi})^2}{2} + \frac{P r^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{P_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{P_2 \dot{s}^2}{2} = \frac{s^2}{2} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) + \frac{3 P r^2 \dot{\varphi}^2}{4} - \frac{P r \dot{s} \dot{\varphi}}{2}.$$

Вычисляем производные, входящие в левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{s}{g} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) - \frac{P r}{g} \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{s}{g} \left(P + \frac{P_1}{2} + P_2 \right) - \frac{P r}{g} \dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3 P r^2}{2g} \dot{\varphi} - \frac{P r}{g} \dot{s};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3 P r^2}{2g} \ddot{\varphi} - \frac{P r}{g} \ddot{s}.$$

При вычислении обобщенных сил следует учитывать силы тяжести $\vec{P}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и силу трения F наклонной плоскости. Реакция идеальных связей (нить, ось блока, гладкая наклонная плоскость) учитывать не нужно. Важно выбрать правильное направление для силы трения F , которая всегда направлена против скорости движения $\dot{s}$ груза D заранее не известной. Предположим, что движение груза направлено вниз по наклонной плоскости. Тогда сила трения будет иметь противоположное направление. Решаем задачу при этом предположении. Если получим $\dot{s}$ (в данном случае и $\dot{\varphi}$, так как движение направлено вниз из состояния покоя) со знаком плюс, то принятое предположение правильно. Если же ускорение $\dot{s}$ (а следовательно, и скорость $\dot{s}$) получится отрицательным, то следует изменить направление силы на обратное и снова решить задачу, так как предполагаемое направление силы трения оказалось направленным по движению груза, т. е. неправильно. При $\dot{s} = 0$ движение груза из состояния покоя начаться не может.

Установив предполагаемое направление силы трения вверх по наклонной плоскости, вычисляем обобщенную силу Q_s . При этом сообщаем системе такое возможное перемещение, допускаемое связями, при котором угол φ не изменяется, а изменяется только s на положительную величину δs , т. е. сообщаем возможное перемещение грузу вниз по наклонной плоскости. По формуле для обобщенной силы имеем

$$Q_s = \frac{(\Sigma \delta A_s)}{\delta s} = \frac{(P_2 \sin \alpha - f N) \delta s - P \delta s}{\delta s} = P_2 \sin \alpha - f N - P,$$

так как при $\varphi = \text{const}$ перемещение точки C диска такое же, как и у точки M , а $F = F_{\text{макс}} = f N$. Сила $\vec{P}_1$ приложена в неподвижной точке, и ее элементарная работа на возможном перемещении равна нулю, так как возможное перемещение неподвижной точки равно нулю.

Нормальную реакцию наклонной плоскости определяем из условия равновесия сил для груза D в направлении нормали к наклонной плоскости. Имеем

$$N - P_2 \cos \alpha = 0; \quad N = P_2 \cos \alpha.$$

С учетом этого

$$Q_s = P_2 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - P.$$

При вычислении обобщенной силы Q_φ сообщаем системе возможное перемещение, при котором изменяется только угол φ на положительную величину $\delta \varphi$, а обобщенная координата s не изменяется. Получаем

$$Q_\varphi = \frac{(\Sigma \delta A_\varphi)}{\delta \varphi} = \frac{P \delta s_C}{\delta \varphi}.$$

В этом случае точка M диска является его мгновенным центром скоростей, поэтому $\delta s_C = r \delta \varphi$ и δs_C при положитель