13. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Из 10 полученных уравнений можно сделать вывод, что просто уравнения Лагранжа. Уравнения Лагранжа первого рода — 6 уравнений, а уравнения Лагранжа второго рода — получены для одной точки в § 11 гл.1. Уравнения Лагранжа второго рода для системы точек.

Гамильтон Лагранжа уравнения второго рода. Уравнения потребуется использовать три тождества. Одно из них — вторая теорема формулы дифференцирования скалярного произведения двух любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Если принять за $\vec{b}$ вектор скорости $\vec{v}_k = \vec{v}_{ak}$ а за $\vec{a}$ — вектор $\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}$ то с соответствием с этим получим следующее тождество

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\vec{v}_{ak}\right) = \frac{d\vec{v}_{ak}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} + \vec{v}_{ak}\cdot\frac{\partial\vec{v}_{ak}}{\partial q_j} \tag{11}$$

Другое тождество (тождество Лагранжа) выражается в виде

$$\partial\vec{v}_k/\partial\dot{q}_j = \partial\vec{r}_k/\partial q_j, \tag{12}$$

где точка над вектором обозначает производную по времени. Величины $\partial\vec{r}_k/\partial q_j$ называются обобщенной скоростью. Тождество (12) доказывается следующим образом. Дифференцируем вектор $\vec{v}_{ak}$ можно поставить обобщенные скорости $\dot{q}_j$ и получим выражение для скорости точки. Обобщенные скорости $\dot{q}_j$ — независимые переменные, поэтому $\partial\dot{q}_j/\partial\dot{q}_j = 1$ а остальные производные равны нулю. Доказательство. Действительно, в общем случае

$$\partial\vec{v}_k/\partial\dot{q}_j = \partial\vec{r}_k/\partial q_j$$

При движении системы обобщенные скорости $\dot{q}_j$ и обобщенные координаты q_j — независимые переменные и $\dot{q}_j$ по времени или это сложную функцию, имеем

$$\dot{q}_j = \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_n}\ddot{q}_n \tag{13}$$

Частные производные $\partial\dot{q}_j/\partial q_i$ и $\partial\dot{q}_j/\partial\dot{q}_i$ не могут зависеть от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и $\dot{q}_j$ и обобщенных координат q_i и q_j соответственно. Поэтому $\partial\dot{q}_j/\partial q_i$ и $\partial\dot{q}_j/\partial\dot{q}_i$ не могут зависеть от обобщенных скоростей. Получим

$$\dot{q}_j = \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{q}_n}\ddot{q}_n \tag{14}$$

Для доказательства этого тождества вычислим $\partial\vec{v}_k/\partial q_j$. использовать формулу дифференцирования скалярного произведения векторов (11) для обобщенных скоростей. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right) \tag{15}$$

С другой стороны, $\partial\vec{v}_k/\partial\dot{q}_j$ — скорость изменения вектора $\vec{v}_k$ при изменении только одной обобщенной скорости $\dot{q}_j$ при неизменных всех остальных обобщенных скоростях. Поэтому $\partial\vec{v}_k/\partial\dot{q}_j$ — сложных функций времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j}\right) = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_n}\ddot{q}_n \tag{16}$$

Порядок частных производных можно изменить. Вторые производные можно менять местами. С учетом этого (15) и (16) совпадают. Тождество (14) доказано. Тождество (15) доказано.

Тождество (12) доказано. Тождество (14) доказано.

Тождество (12) называется Лагранжа заключается в возможности сокращения на $d\vec{r}$ в обобщенной скорости или вектор $d\vec{r}$.

Доказательство

Вычислим производные $\partial T/\partial q_j$ и $\partial T/\partial\dot{q}_j$ и $\partial T/\partial t$, получим следующие выражения

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_j} \tag{17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j} \tag{18}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial t} \tag{19}$$

Для доказательства этого тождества вычислим $\partial\vec{v}_k/\partial q_j$. использовать тождество (12) для обобщенных скоростей вместо вектор обобщенных скоростей. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right) \tag{20}$$

С другой стороны, $\partial\vec{v}_k/\partial\dot{q}_j$ — скорость изменения вектора $\vec{v}_k$ при изменении только одной обобщенной скорости $\dot{q}_j$ при неизменных всех остальных обобщенных скоростях. Поэтому $\partial\vec{v}_k/\partial\dot{q}_j$ — сложных функций времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j}\right) = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_n}\ddot{q}_n \tag{21}$$

Порядок частных производных можно менять местами. Вторые производные можно менять местами. С учетом этого (15) и (16) совпадают.

Тождество (12) доказано. Тождество (14) доказано.

Тождество Лагранжа